

Nome: _____

Curso: _____ Matrícula: _____

Leia com Atenção:

- Contarão pontos a clareza das ideias e a precisão no raciocínio; evite escrever em excesso ou pouco demais.

1) (2,5 pontos) Prove as seguintes afirmações a respeito de conjuntos e funções:

- $A \setminus B = A \cap B^c$,
- Se $f : A \rightarrow B$ é uma função e $X \subseteq A$ então $X \subseteq f^{-1}(f(X))$.
- Se $f : A \rightarrow B$ é injetora e $X \subseteq A$ então $X = f^{-1}(f(X))$.

2) (2,5 pontos) Prove as afirmações abaixo para números reais a, b, c , usando as propriedades (P1)-(P12), definições e proposições vistas em sala, *indicando claramente a propriedade, proposição ou definição usada em cada passo*.

- $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$,
- $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ se $b, d \neq 0$ (você pode usar que $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$),
- Se $a > 0$ então $a^{-1} > 0$.

3) (2,5 pontos) Mostre as seguintes relações para números reais a, b (você pode fazer essa questão de forma mais direta sem demonstrar cada passo como na questão 2):

- $|\frac{1}{a}| = \frac{1}{|a|}$ se $a \neq 0$,
- $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

4) (2,5 pontos) Suponha que $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ e $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$. Mostre que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

*“Problems worthy of attack prove
their worth by hitting back.”*

Piet Hein