H-Cálculo I - PAM

Prof. Marianna Ravara Vago

Exame de admissão - 04/04/2018

Nome: ______________________________ e-mail: ______________________________

Curso: ____________________________ Matrícula: ____________________________

veterano ☐ calouro ☐

1. Prove as afirmações abaixo para números reais a, b e c usando as propriedades $P(1) - P(12)$ vistas em sala, *indicando claramente a propriedade usada em cada passo.* ATENÇÃO: se você necessitar algum resultado intermediário que não esteja listado nas propriedades $P(1) - P(12)$, *você deve demonstrar este resultado.*

[1 pt] (a) Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$ então $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

[1 pt] (b) Se $a < b$ e $c < 0$ então $bc < ac$.

[1 pt] (c) Se $0 < a < b$ então $\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$.

Para as questões abaixo faça as contas normalmente, sem se preocupar com as propriedades $P(1) - P(12)$.

[1,5 pts] 2. Assumindo a desigualdade triangular, mostre que

$$\big|\, |x| - |y| \,\big| \leq |x - y| \ .$$

[1,5 pts] 3. Usando indução, mostre que para todo número natural n, $n^3 + 2n$ é múltiplo de 3.

4. Admita que $\sqrt{2}$ é irracional.

[1 pt] (a) Prove que para todo n natural, $\dfrac{1}{n\sqrt{2}}$ é irracional. (*Sugestão: não é necessário usar indução!*)

[1,5 pts] (b) Admita, sem demonstrar, a Propriedade Arquimediana de $\mathbb{R}$: para todo número real $a > 0$ existe um número natural n tal que $a < n$. Usando esta propriedade e o item (a), prove que para qualquer número real $a > 0$ existem um número racional r e um número irracional i tais que $0 < r < a$ e $0 < i < a$.

[1,5 pts] 5. Vamos provar que todos os cavalos tem a mesma cor. Para $n \geq 1$, considere a afirmação

$$P(n): \text{Num conjunto de } n \text{ cavalos, todos tem a mesma cor.}$$

$P(1)$ é claramente verdadeira. Suponha que vale $P(n)$ e vejamos que vale $P(n+1)$. Considere um conjunto

$$\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \ldots, C_n, C_{n+1}\}$$

com $n+1$ cavalos. Pela hipótese de indução, os cavalos em $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ tem a mesma cor e os cavalos em $\{C_2, \ldots, C_n, C_{n+1}\}$ tem a mesma cor. Como estes conjuntos de n cavalos tem cavalos em comum, obtemos que todos os cavalos de $\mathcal{C}$ tem a mesma cor. Logo, pelo Princípio da Indução, em qualquer conjunto com n cavalos todos tem a mesma cor.

Este raciocínio está correto?

Propriedades dos Números Reais

$P(1)$: $a + (b + c) = (a + b) + c$
$P(2)$: $a + 0 = 0 + a = a$
$P(3)$: $a + (-a) = (-a) + a = 0$
$P(4)$: $a + b = b + a$
$P(5)$: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
$P(6)$: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a;\ 1 \neq 0$
$P(7)$: Se $a \neq 0$, $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$
$P(8)$: $a \cdot b = b \cdot a$
$P(9)$: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Seja $\mathcal{P} = \{\text{conjunto dos números reais positivos}\}$.

$P(10)$: Para um número a qualquer, uma e apenas uma das alternativas abaixo é válida:
(i) $a = 0$
(ii) $a \in \mathcal{P}$
(iii) $-a \in \mathcal{P}$
$P(11)$: Se $a, b \in \mathcal{P}$ então $a + b \in \mathcal{P}$.
$P(12)$: Se $a, b \in \mathcal{P}$ então $a \cdot b \in \mathcal{P}$.

Desigualdade triangular: Para quaisquer x, y reais tem-se $|x + y| \leq |x| + |y|$.