UFSC
PAM - MTM 5801 - H - CÁLCULO 1 - 2017.1
1A. PROVA (NIVELAMENTO)

RAPHAEL DA HORA

Nome:______________________________ **Matrícula**: ____________________

email:______________________________ **Curso**: ______________________________

(1) Sejam a, b, c, d números racionais. Mostre que se $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$, então $a = c$ e $b = d$. (2,0 pontos)

(2) Use os aximos dados na página seguinte para mostrar que se $a, b \in \mathbb{R}$ satisfazem $a^2 + b^2 = 0$, então $a = b = 0$. (2,0 pontos)

(3) Sejam a, b números racionais positivos. Mostre que se $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ é racional, então $\sqrt{a}$ e $\sqrt{b}$ são ambos racionais. (2,0 pontos)

(4) Sejam x, y números reais positivos. Mostre que (2,0 pontos)

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

(5) (Robô que se move diagonalmente) Considere um robô que pode caminhar na diagonal de uma grade bidimensional. A posição do robô num dado momento será dado em coordenadas (x, y), com x, y inteiros. O robô começa na posição $(0, 0)$ e a cada passo caminha uma unidade para cima ou para baixo (verticalmente) e uma unidade para esquerda ou direita (horizontalmente). Para ser mais claro, a cada passo, o robô se move exatamente uma unidade verticalmente e uma unidade horizontalmente. Por exemplo, depois do primeiro passo o robô pode estar nas posições $(1, 1), (1, -1), (-1, 1)$ ou $(-1, -1)$. Depois do segundo passo, existem nove possíveis posições que o robô pode estar, incluindo o $(0, 0)$. Mostre que a seguinte afirmação é satisfeita para todo $t \in \mathbb{N}$ (2,0 pontos)

$P(t)$: se o robô está na posição (x, y) depois de t passos, então $x + y$ é par.

Veja a figura na página seguinte.

Axiomas dos números reais

(1) $a + (b + c) = (a + b) + c$.
(2) $a + 0 = 0 + a = a$.
(3) $a + (-a) = (-a) + a = 0$.
(4) $a + b = b + a$.
(5) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
(6) $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, $1 \neq 0$.
(7) $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$, para $a \neq 0$.
(8) $a \cdot b = b \cdot a$.
(9) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.
(10) Dado $a \in \mathbb{R}$, temos $a = 0$, ou $a > 0$ ou $a < 0$.
(11) Se $a > 0$ e $b > 0$, então $a + b > 0$.
(12) Se $a > 0$ e $b > 0$, então $a \cdot b > 0$.

Figura 1. Exemplo da grade bidimensional do problema 5.