MTM 5801 - H - CÁLCULO 1 - 2015
1A. PROVA (NIVELAMENTO)

RAPHAEL DA HORA

(1) Se $a \cdot a = a$, então mostre que $a = 0$ ou $a = 1$. (2,0 pontos)

(2) Se r é racional ($r \neq 0$) e x é irracional, então mostre que $r + x$ e rx são irracionais. (2,0 pontos)

(3) Mostre que $x^2 + xy + y^2 \geq 0$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$. (2,0 pontos)

(4) Dado $a \in \mathbb{R}$, seja $A = \{n \in \mathbb{N}; a < n\}$. Assuma que para todo $a \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a < n$. Além disso, assuma que dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$ existe no máximo uma quantidade finita de números naturais no intervalo (a, b). Mostre que o conjunto A possui um menor elemento, i.e., existe $n_0 \in A$ tal que $n_0 \leq n$, para todo $n \in A$. (2,0 pontos)

(5) Seja $s_1 = \sqrt{2}$, e (2,0 pontos)

$$s_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{s_n}}, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Mostre que $2 > s_{n+1} > s_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Axiomas dos números reais

(1) $a + (b + c) = (a + b) + c$.
(2) $a + 0 = 0 + a = a$.
(3) $a + (-a) = (-a) + a = 0$.
(4) $a + b = b + a$.
(5) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
(6) $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, $1 \neq 0$.
(7) $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$, para $a \neq 0$.
(8) $a \cdot b = b \cdot a$.
(9) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.
(10) Dado $a \in \mathbb{R}$, temos $a = 0$, ou $a > 0$ ou $a < 0$.
(11) Se $a > 0$ e $b > 0$, então $a + b > 0$.
(12) Se $a > 0$ e $b > 0$, então $a \cdot b > 0$.