MTM5801 - H-Cálculo I - 2014/01
Prof. Gilles Gonçalves de Castro
Prova 1 (Admissão) - 04 de abril de 2014

Nome: ______________________________

Curso: ____________________ Matrícula: ____________________

Leia com Atenção:

- Contarão pontos a clareza das ideias e a precisão no raciocínio; evite escrever em excesso ou pouco demais.

1) (2,5 pontos) Prove as afirmações abaixo para números reais a, b, c, d, usando as definições, as propriedades (P1)-(P12) e as proposições vistas em sala, *indicando claramente a propriedade, proposição ou definição usada em cada passo.*

   (a) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

   (b) Se $a < b$ e $c < d$ então $a + c < b + d$.

   (c) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ se $b, d \neq 0$ (você pode usar que $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$).

2) (2,0 pontos) Para $a, b \in \mathbb{R}$, prove que $-b \leq a \leq b$ se e somente se $|a| \leq b$.

3) (2,5 pontos) Assuma que para $x \in \mathbb{R}$ com $x \geq 0$ existe um único $y \in \mathbb{R}$ com $y \geq 0$ tal que $y^2 = x$ e neste caso escreva $y = \sqrt{x}$ (iremos provar isso futuramente).

   (a) Usando o Teorema Fundamental da Aritmética (fatoração em primos), mostre que se $p \in \mathbb{N}$ é um número primo então $\sqrt{p}$ é irracional.

   (b) Prove que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ também é irracional.

4) (2,0 pontos) Para $a \in \mathbb{R}$ definimos $a^1 = a$ e $a^{n+1} = a^n \cdot a$ para $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 1$. Vimos em aula que a^n está bem definido e que $a^{n+m} = a^n a^m$ para todos $m, n \in \mathbb{N}$ com $m, n \geq 1$. Prove que $(a^m)^n = a^{mn}$ para todos $m, n \in \mathbb{N}$ com $m, n \geq 1$.

5) (1,0 ponto) Vamos provar que todos os cavalos têm a mesma cor. Para $n \geq 1$, considere a sentença

   $P(n)$: Num conjunto de n cavalos, todos tem a mesma cor.

   $P(1)$ é claramente verdadeira. Suponha que vale $P(n)$ e vejamos que vale $P(n+1)$. Considere um conjunto

   $$\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \ldots, C_n, C_{n+1}\}$$

   com $n+1$ cavalos. Pela hipótese de indução os cavalos em $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ têm a mesma cor e os cavalos em $\{C_2, \ldots, C_n, C_{n+1}\}$ têm a mesma cor. Como esses conjuntos de n cavalos têm cavalos em comum, temos que todos os cavalos em $\mathcal{C}$ tem a mesma cor. Logo, pelo príncipio da indução, em qualquer conjunto com n cavalos todos tem a mesma cor.

   Esse raciocínio está correto?

"*Problems worthy of attack prove*
their worth by hitting back."

Piet Hein