PAM — PROGRAMA AVANÇADO DE MATEMÁTICA — 2003.1

PROVA DE SELEÇÃO

Quest.	Nota
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Nome ______________________________

Curso ______________________________

Assinatura ______________________________

Assinale se você é calouro ☐ ou veterano ☐

---

1) Prove que para quaisquer números x e y tem-se que
   a) *(valor 1 ponto)* $x + x = 2x$,
   b) *(valor 1 ponto)* $(x + y)^2 = (x^2 + 2xy) + y^2$.

   Nesta questão é fundamental que você mencione, a cada passagem, o axioma ou Teorema usado.

2) *(valor 1 ponto)* Prove que se $x > 0$, então $x^{-1} > 0$.

3) Nesta questão vamos supor que dado qualquer número $a > 0$ existe ao menos um número x tal que $x^2 = a$.
   a) *(valor 1 ponto)* Prove que existe apenas um tal x que seja positivo (este x é chamado de "raiz quadrada" de a e é indicado por $\sqrt{a}$).
   b) *(valor 1 ponto)* Prove que se $0 < a < b$, então $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.
   c) *(valor 1 ponto)* Prove que se a e b são positivos então $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.

4) Prove que para quaisquer números x e y e para quaisquer $n, m \in \mathbb{N}$ valem
   a) *(valor 1 ponto)* $x^{n+m} = x^n x^m$
   b) *(valor 1 ponto)* $(x^n)^m = x^{nm}$

5) *(valor 2 pontos)* Prove que para qualquer $x > 0$ e para qualquer $n \in \mathbb{N}$ vale a desigualdade

$$x^n \geq 1 + nx - n.$$

Ruy Exel